

Proposition: Soit $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$ et φ 2π -périodique définie par: $\forall x \in]-\pi, \pi], \varphi(x) = e^{\frac{ix}{2\pi}}$.
 Alors le développement en série de Fourier de φ est $(e^{\frac{iz}{2}} - e^{-\frac{iz}{2}}) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{z - 2in\pi} e^{inx}$.

φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{it}{2\pi}} e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{\frac{(2-i)n}{2\pi}t}}{\frac{(2-i)n}{2\pi}} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n (e^{\frac{iz}{2}} - e^{-\frac{iz}{2}})}{z - 2in\pi} \rightarrow 0 \text{ car } z \notin 2i\pi\mathbb{Z}$

De plus, φ est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc par le thm de Dirichlet,
 $\forall x \in \mathbb{R}, (e^{\frac{iz}{2}} - e^{-\frac{iz}{2}}) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{z - 2in\pi} e^{inx} = \frac{\varphi(x) + \varphi(x+)}{2}$.

Proposition: Le développement en série entière en 0 de $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$ est:

$$\left[\forall |z| < 2\pi, \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) z^{2k} \right]$$

En $x = \pi$, on a: $\varphi(\pi^-) = \lim_{t \rightarrow \pi^-} e^{\frac{it}{2\pi}} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ et $\varphi(\pi^+) = \lim_{t \rightarrow \pi^+} e^{\frac{it}{2\pi}} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$.

D'où $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z - 2in\pi} = \frac{e^{\frac{iz}{2}} + e^{-\frac{iz}{2}}}{2(e^{\frac{iz}{2}} - e^{-\frac{iz}{2}})}$. Or, $\frac{e^{\frac{iz}{2}} + e^{-\frac{iz}{2}}}{2(e^{\frac{iz}{2}} - e^{-\frac{iz}{2}})} = \frac{e^{\frac{z}{2}} + 1}{2(e^{\frac{z}{2}} - 1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{z}{2}} - 1}, \forall z \notin 2i\pi\mathbb{Z}$.

Et $\frac{1}{z - 2in\pi} = \frac{z + 2in\pi}{z^2 + 4n^2\pi^2}$. Donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z - 2in\pi} = \frac{1}{z} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z}{z^2 + 4n^2\pi^2}$.

$\Rightarrow \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z^2}{z^2 + 4n^2\pi^2}, \forall z \notin 2i\pi\mathbb{Z}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $|z| < 2\pi$. Alors $\frac{z^2}{z^2 + 4n^2\pi^2} = \frac{z^2}{4n^2\pi^2} \frac{1}{1 + (\frac{z}{2in\pi})^2} = \frac{z^2}{4n^2\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{z}{2in\pi}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{z}{2in\pi}\right)^{2k}$

Or, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \left| (-1)^{k-1} \left(\frac{z}{2in\pi}\right)^{2k} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left|\frac{z}{2in\pi}\right|^2}{1 - \left|\frac{z}{2in\pi}\right|^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^2}{4n^2\pi^2 - |z|^2} < +\infty, \forall |z| < 2\pi$.

Donc par Fubini, $\forall |z| < 2\pi, z \neq 0, \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) z^{2k}$.

Puis $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$ est prolongeable par continuité pour $z = 0$, et l'égalité reste vraie en $z = 0$.

$$\frac{z}{e^z - 1} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{e^z - 1}\right)'(0) = 1$$

Proposition: On définit $(b_n)_{n \geq 0}$ par: $\forall |z| < 2\pi, \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$.

Alors $\forall k \geq 1, \zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} b_{2k} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!} \in \pi^{2k} \mathbb{Q}$.

On a: $\forall |z| < 2\pi, \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) z^{2k}$.

Par unicité du développement en série entière, $\forall k \geq 1, \frac{b_{2k}}{k!} = \frac{2(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k)$ i.e. $\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} b_{2k} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!}, \forall k \geq 1$.

Montrons que $\forall k \geq 0, b_k \in \mathbb{Q}$:

$$\forall |z| < 2\pi, z = \frac{z}{\frac{z}{e^z - 1}} (e^z - 1) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right)$$

Or, $\sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} z^n \subset V$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n!} \subset VA$, donc par le thm de Mertens, on a le produit de Cauchy:

$$z = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n$$

D'où, par unicité du développement en série entière, $\forall n \geq 2, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k! (n-k)!} = 0$. Donc $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$.

D'où, $\forall n \geq 2, b_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} b_k \in \mathbb{Q}$ par récurrence immédiate.